Algebra الجبر

للفرقة الإعدادية – هندسة طنطا – 2015-2016

الإستنتاج الرياضي

Mathematical Induction

الإستنتاج الرياضي Mathematical Induction :

طريقة تثبت العديد من النظريات التي تحتوي على رمزا n والتي تاخذ قيما متغيرة موجبة $+Ve.I.$

وهي تنقسم إلى مرحلتين :

The base القاعدة

وفيها نثبت أن النظرية هتتحقق لو عوضنا في الطرفين عن n=1 أو nتساوي أقل قيمة موجبه ممكنة لو في حالة وجود شرط يعني مثلا يقولك حيث n>5 أقل قيمة هنعوض بيها في القاعدة هي .

The Step الخطوة

وفيها نفترض Assume أن المعادلة تتحقق عند n=k

بعد كده نثبت أن النظرية تتحقق لو وضعنا n=k+1 في الطرفين .

شرح للتبسيط

يعني بالبلدي يا جماعة أن الاستنتاج الرياضي لأي نظرية قايم على اننا نثبت أن القاعدة يعني أول قيمة ل n ممكنة بتحقق النظريه دي كده لازمة مرحله القاعدة the base

اللي بيلخبط ناس كتيير بقى إيه الخطوة دي ببساطه أنا عشان أثبت النظرية محتاج أثبت أنها بتحقق كل قيم n طب ده إزاي وانا في مرجله القاعدة أثبت انها بتحقق أول قيمه بس ؟؟

الحل إني بثبت أن طالما الأولى اتحققت ولتكن n=kفإذن القيمه الموجبه اللي بعدهاا على طووول هي كمان هتتحقق اوتوماتيك اللي هي n=k+1

مثال يوضح أكتر : إحنا دلوقتي عاوزين نثبت أن n=2بتحقق النظريه دي فأنا لما بثبت مرحلة الخطوة دي بقوله طالما انت أثبت أن n=1بتحققها اذن n=2اللي هي بعدها على طول بتحققها طب كده n=2يتحققها تماااااام طب ما من مرحله الخطوه طالما n=3هي اللي بعد ال n=2على طوول و n=2بتحققها يبقى اكيييد n=3هي كمان هتحققلي النظرية دي وكذلك بقى لحححححد مالانهاية من الأعداد الموجبه اللي أكبر من قيمة القاعده اللي بتحقق النظرية دي

إتفهمت فكرة الإثبات ؟ :D

ملاحظات

1- إختصارات ورموز تستخدم في الحل

الرمز	المعنى
L.H.S	Left Hand Side الطرف الأيسر
R.H.S	Right Hand Side الطرف الأيمن
R.T.P	Requality to Prove المطلوب إثباته
$\forall$	For every لجميع قيم
+Ve.I.	Positive Integrative متغير موجب

2- بعد إثبات كل من القاعدة و الخطوة بنكون أثبتنا أن النظريه تحقق جميع قيم n
ونكتب الفقرة التالية بعد كل مسألة (هنا سوف نكتبها في أول مثال فقط)

$Hence, The\ Th. Is\ true\ at\ n = k + 1\ provided\ that\ it\ is\ true\ at$

$n = k\ and\ since\ it's\ true\ at\ n = 1$

$then\ , It\ is\ true\ \forall\ (for\ every)\ n$

3- علامة الجمع سيجما $\sum_{i=1}^{n} a_i$ تجمع القيم المنفصله التي تبدأ ب 1 و تنتهي ب n تعويضا في العلاقه عن مكان i بتلك القيمة

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

إذا كان Kثابت

$$\sum_{i=1}^{n} K = K + K + K + \cdots + K = nK$$

أمثلة المحاضرة

Ex : Use the Math. Ind. Method to prove that

1-

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

-------Solution-----

The Base : at n=1 ,L.H.S = 1 , R.H.S = 1,Then the rule is true at n=1

The Step : assume that

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

R.T.P :

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + k + 1 = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

L.H.S = $\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} =$
$\frac{(k+1)(k+2)}{2} =$R.H.S

$$Hence, The\ Th. Is\ true\ at\ n = k + 1\ provided\ that\ it\ is\ true\ at$$

$$n = k\ and\ since\ it's\ true\ at\ n = 1$$

$$then\ , It\ is\ true\ \forall\ n$$

2- $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$

-------Solution-----

The Base : at n=1 ,L.H.S = $\frac{1}{2}$, R.H.S = $\frac{1}{2}$,Then the rule is true at n=1

The Step : assume that $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}$

R.T.P $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k+1}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+2)!}$

L.H.S = $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}$

$$1-\frac{1}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}=1-[\frac{1}{(k+1)!}-\frac{k+1}{(k+2)!}]$$

$$=1-\frac{(k+2)-(k+1)}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+2)!}$$ = R.H.S

$3 - 2^n > n^2 \, , n \geq 5$

-------Solution-----

At n= 5 , L.H.S = $2^5 = 32$, R.H.S = $5^2 = 25$ then the rule is true 32 > 25

Assume that $2^k > k^2$ R.T.P $2^{k+1} > (k+1)^2$

L.H.S = $2^{k+1} > 2k^2$

$$2^{k+1} - (k+1)^2 > 2k^2 - (k+1)^2$$

$$2^{k+1} - (k+1)^2 > k^2 - 2k - 1$$

$$2^{k+1} - (k+1)^2 > (k - \frac{1+\sqrt{3}}{2})(k - \frac{1-\sqrt{3}}{2})$$

فإن الطرف الأيمن من هذه المتباينه موجب وأكبر من الصفر إذن الطرف الأيسر منها حتماً موجب 5بأقل قيمة لها وهي kوإذا وضعت

وأكبر من الصفر

$$2^{k+1} - (k+1)^2 > 0$$

$2^{k+1} > (k+1)^2$=R.H.S

4- $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad , n > 1$

-------Solution-----

At n = 2 L.H.S = $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$ then the rule is true

Assume $S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$

R.T.P $S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \cdots + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24}$

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24}$$

R.T.P $S_{k+1} - S_k > 0$

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - [\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k}]$$

$$= \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{2k+2+2k+1-4k-2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{(2k+1)(k+1)} > 0$$

$$S_{k+1} > S_k > \frac{13}{24}$$

5 -

If $y = \sin(ax + b)$ prove that

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a^n \sin(ax + b + \frac{n\pi}{2})$$

-------Solution-----

At n=1 , L.H.S = $\frac{dy}{dx} = a\cos(ax + b) = a\sin(ax + b + \frac{\pi}{2})$

R.H.S = $a\sin(ax + b + \frac{\pi}{2})$

Assume that

$$\frac{d^k y}{dx^k} = a^k \sin\left(ax + b + \frac{k\pi}{2}\right)$$

R.T.P

$$\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = a^{k+1} \sin\left(ax + b + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

L.H.S $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right) = a.\, a^k \cos\left(ax + b + \frac{k\pi}{2}\right)$

$$= a^{k+1} \cos\left(ax + b + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$a^{k+1} \sin\left(ax + b + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) = \text{R.H.S}$$



طبعا كلنا ابتدينا النهارده سنه جديده و بحماس و حيويه ونشاط

لكن حبه حبه بيبتدي اللي بيكتب محاضرات ميكملش، الحمل يتقل ، الدنيا توسع منك واحده واحده

وده دورنا اللي حابين نقدمه للسنه التانيه وباذن الله بشكل أفضل ، لكن لما كنا بنقدم الخدمات دي السنه اللي فاتت في اعدادي كانت دفعه واحده السنه دي التارجت بتاعنا بقى : اعدادي الجديده و كل أقسام أولى

لكن الاعضاء الحاليين ميغطوش كل الاقسام ف اولى ولا اعدادي

عشان كده...

مطلوب على الاقل 3 مندوبين عن

-1اعدادي 2- اولى مدني 3- اولى عماره 4- اولى كهربا 5- اولى ميكانيكا

فلو مثلا واحد خطه حلو ويقدر يتابع في كتابه المحاضرات والسكاشن ، و واحد تاني بيحب يتدرب في

حل الامتحانات و الشيتات و تالت يبحب يلخص المعلومات اللي بيذاكرها

كل اللي عليك تسجل هنا www.CollegeTanta.com/Join :

عشان نقدر نجمع مجهوداتك وتنزل لكل الناس ع الموقع باسمك و يكون دافع ليك انك تستمر و كمان هتكون ناشر معانا في الموقع بحيث تتابع بكل المطلوب منكم مع زمايلك اول باول ، مش بس كده في عروض كتير لكل اللي هينضم لينا عشان طبعا اللي بيتعب يستاهل كل خير D:

ممكن تدخل هنا و تعرف اكتر www.CollegeTanta.com/about-us :

*وفي عروض للمصممين والمطورين لاننا زي ما بنهتم بالماده العلميه بنهتم بطريقه العرض وتوافر الذوق فيها

في النهايه هتلاقي مكان واحد بشكل منظم يجمع للطلبه كل اللي هم محتاجينه من مواد علميه ومعلومات عن اللي مطلوب منهم و اهم الاخبار